Poglavlje 1

Sustavi linearnih jednažbi, matrice i determinante

1.1 Sustavi linearnih jednažbi - Gaussova metoda

Svaki sustav od m linearnih jednažbi s n nepoznanica moguće je riješiti upotrebom **Gaussove metode** (**metode eliminacije**), koju je najbolje objasniti na primjeru.

Primjer 1 Riješite sustav

$$\begin{aligned}
x + 2y - z + u &= -1\\
2x + 5y - z + 2u &= -2\\
3x - y - 2z + u &= 5\\
x - y + 3z - 5u &= 6.
\end{aligned}$$

Rješenje: Iz prve jednažbe dobivamo $x = -1 - 2y + z - u$, što uvrstimo u preostale tri jednažbe sustava (što je isto kao da prvu jednažbu sustava množimo redom s -2,-3 i -1 i rezultate množenja pribrojimo redom drugoj, trećoj i četvrtoj jednažbi). Dobiva se

$$\begin{aligned}
x + 2y - z + u &= -1\\
y + z &= 0\\
-7y + z - 2u &= 8\\
-3y + 4z - 6u &= 7.
\end{aligned}$$

Ovaj sustav je ekvivalentan početnom, što znači da oni imaju isti skup rješenja. Međutim, taj je sustav jednostavniji, jer se nepoznanica x pojavljuje samo u prvoj jednažbi.

Sada iz druge jednadžbe izrazimo y pomoću z i u i uvrstimo ga u preostale dvije jednadžbe. Dolazimo do sustava

$$\begin{aligned}
x + 2y - z + u &= -1\\
y + z &= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
8z - 2u &= 8 \\
7z - 6u &= 7.
\end{aligned}
$$

I ovaj je sustav jednostavniji od svog prethodnika, jer se nepoznanica x pojavljuje samo u prvoj, a nepoznanica y u prvoj i drugoj jednadžbi.

Iz treće jednadžbe izrazimo z pomoću varijable u i uvrstimo ga u četvrtu jednadžbu, pa dobivamo

$$
\begin{aligned}
x + 2y - z + u &= -1 \\
y + z &= 0 \\
8z - 2u &= 8 \\
-\frac{17}{4}u &= 0.
\end{aligned}
$$

Ovaj sustav ima tzv. **trokutastu** formu, a lako ga je riješiti idući odozdo prema gore: iz posljednje jednažbe dobivamo $u = 0$, što uvršteno u treću jednadžbu povlači $8z = 8$, dakle $z = 1$. Sada se iz druge jednažbe uvrštanjem $z = 1$ dobije $y = -1$, a uvrštanjem $y = -1$, $z = 1$ i $u = 0$ u prvu jednadžbu $x = 2$. Dakle, jedinstveno rješenje sustava dano je uređenom četvorkom $(2, -1, 1, 0)$.

Pored jedinstvenog rješenja, moguće je da sustav nema rješenja ili da ih ima beskonačno mnogo, kao u slijedećem zadatku.

Primjer 2 Riješite sustav:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3 \\
-2x_1 + x_3 + x_4 - 5x_5 &= -2 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 + 5x_5 &= 3 \\
-x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 10x_4 - 9x_5 &= -3.
\end{aligned}
$$

Rješenje: Pomnožimo prvu jednadžbu redom s $2, -1$ i 1 i dodajmo je redom drugoj, trećoj i četvrtoj jednadžbi. Dobivamo ekvivalentni sustav:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3 \\
4x_2 + 7x_3 + 5x_4 - 3x_5 &= 4 \\
-4x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 0 \\
8x_3 - 8x_4 - 8x_5 &= 0.
\end{aligned}
$$

Budući da su posljednje dvije jednadžbe ekvivalentne (podijelite treću jednadžbu s -4, a četvrtu s 8), ispuštamo posljednju i dolazimo do sustava

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3 \\
4x_2 + 7x_3 + 5x_4 - 3x_5 &= 4 \\
-x_3 + x_4 + x_5 &= 0,
\end{aligned}
$$

kojeg rješavamo po nepoznanicama x_1, x_2 i x_3, pritom smatrajući nepoznanice x_4 i x_5 **danima**. Sustav rješavamo **odozdo prema gore**: $x_3 = x_4 + x_5$, što uvrštajem u drugu jednadžbu daje

$$
x_2 = -3x_4 - x_5 + 1.
$$

Uvrstimo li ovako dobivene izraze za x_2 i x_3 u prvu jednaždbu, dolazimo do sljedeće ovisnosti varijable x_1 o x_4 i x_5:

$$x_1 = x_4 - 2x_5 + 1.$$

Ako zapišemo $x_4 = \lambda$, $x_5 = \mu$, gdje su λ i μ proizvoljni realni brojevi, imamo sljedeće rješenje (što je ujedno i rješenje početnog sustava):

$$\begin{aligned}
x_1 &= \lambda - 2\mu + 1\\
x_2 &= -3\lambda - \mu + 1\\
x_3 &= \lambda + \mu\\
x_4 &= \lambda\\
x_5 &= \mu,
\end{aligned}$$

i to za **svaki** izbor realnih brojeva λ i μ, što znači da sustav ima beskonačno mnogo rjšenja. Simbolički pišemo rješenje sustava kao uređenu petorku $(\lambda - 2\mu + 1, -3\lambda - \mu + 1, \lambda + \mu, \lambda, \mu)$, uz obaveznu napomenu: $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Zadaci sa rokova:

1. Gaussovom metodom riješite sustav:

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 &= 0\\
-x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1\\
8x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 &= 2\\
-4x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 4x_5 &= 0\\
x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1.
\end{aligned}$$

2. Riješite sustav:

$$\begin{aligned}
5x + 4z + 2t &= 3\\
x - y + 2z + t &= 1\\
4x + y + 2z &= 1\\
x + y + z + t &= 0.
\end{aligned}$$

3. Riješite sustav:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1\\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 1\\
3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1.
\end{aligned}$$

4. Riješite sustav:

$$\begin{aligned}
4x - y + z + 2u &= 14\\
2x + y - 3u &= 2\\
x - y + 2z + u &= 3\\
2x + y + z - 4u &= 0.
\end{aligned}$$

5. Riješite sustav:

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= -11 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= -2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 9x_3 - x_4 &= -33. \end{aligned}$$

6. Riješite sustav:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + x_3 - 2x_4 - 3 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_3 + 4x_4 + 3 &= 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - x_3 - 7x_4 - 1 &= 0 \\ -x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Metoda eliminacije koju smo upotrijebili u prethodnim zadacima primjenjuje se i u općem slučaju, kada sustav možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

što označava sustav od m linearnih jednažbi s n realnih nepoznanica $x_1, \ldots, x_n$. Realne brojeve a_{ij}, gdje je $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, zovemo **koeficijenti** sustava, dok realne brojeve $b_1, b_2, \ldots, b_m$ zovemo **slobodni članovi** sustava. Očito je da sve informacije o sustavu nose upravo ovi brojevi.

U primjenama pojavljuju se sustavi koji imaju i po nekoliko stotina jednaždbi i nepoznanica. Radi praktičnijeg zapisivanja ovakvih sustava uvedeno je tabelarno zapisivanje koeficijenata i slobodnih članova.

Definicija 1.1.1 *Pravokutnu tablicu*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

zovemo ***matrica sustava****, a tablicu*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

proširena matrica sustava*.*

Rješavanje sustava Gaussovom metodom eliminacije svodi se na manipulaciju matricom sustava.

1.2 Matrice - uvodni pojmovi

Definicija 1.2.1 *Neka su m i n prirodni brojevi. Svaku familiju A realnih brojeva a_{ij} $(i \in \{1,\ldots,m\}, j \in \{1,\ldots,n\})$ zapisujemo u obliku sheme*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

*i zovemo **matrica** od **m redaka** i **n stupaca**, ili kažemo da je **tipa m × n**. Za element a_{ij} kažemo da dolazi na mjestu (i,j) u matrici A. Skraćeno matricu zapisujemo (a_{ij}).*

*Dvije matrice $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ su **jednake** ako su istog tipa $m \times n$ i $a_{ij} = b_{ij}$ za svaki $i \in \{1,\ldots,m\}$ i svaki $j \in \{1,\ldots,n\}$.*

*Brojevi $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ čine **prvi redak**, $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$ **drugi redak**, a $a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}$ **m-ti redak** matrice A.*

*Brojevi $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$ čine **prvi stupac**, $a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}$ **drugi stupac**, a $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}$ **n-ti stupac** matrice A.*

*Za matricu A kažemo je **kvadratna matrica n-tog reda** ako je $m = n$.*

*Kvadratna matrica A je **dijagonalna** ako je oblika*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

*Elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ čine **glavnu dijagonalu** matrice A.*

*Kvadratna matrica A je **gornja trokutasta matrica** ako joj svi elementi ispod glavne dijagonale iščezavaju, tj. ako je $a_{ij} = 0$ za $i > j$. Kvadratna matrica A je **donja trokutasta** ako joj svi elementi iznad glavne dijagonale iščezavaju, tj. ako je $a_{ij} = 0$ za $i < j$. Jednom riječju gornje i donje trokutaste matrice zovemo **trokutaste matrice**.*

Posebno su važne kvadratne matrice

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

*Matricu I zovemo **jedinična matrica**, a O **nul-matrica** n-tog reda.*

Definicija 1.2.2 ***Transponirana matrica** matrice $A = (a_{ij})$ tipa $m \times n$ je matrica $B = (b_{ji})$ tipa $n \times m$ za koju je $b_{ji} = a_{ij}$ $(i \in \{1,\ldots,m\}, j \in \{1,\ldots,n\})$. Transponiranu matricu označavamo s A^τ.*

Primjer 3 Za matricu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je $A^\tau = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Sada ćemo definirati zbroj matrica, produkt skalara i matrice, te produkt matrica.

Zbrajati se mogu samo matrice istog tipa, i to na sljedeći način:

Definicija 1.2.3 ***Zbroj matrica*** *$A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ tipa $m \times n$ je matrica $C = (c_{ij})$ tipa $m \times n$ s elementima $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, što znači da se zbrajaju elementi na istim pozicijama.*

Primjer 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2 & 3+(-1) & 2+5 \\ -1+(-3) & 0+(-1) & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiramo množenje matrice skalarom:

Definicija 1.2.4 ***Produkt broja λ s matricom*** *$A = (a_{ij})$ tipa $m \times n$ je matrica $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.*

Primjer 5

$$(-3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-3) \cdot 2 & (-3) \cdot (-1) & (-3) \cdot 3 \\ (-3) \cdot 0 & (-3) \cdot 1 & (-3) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Za zbrajanje matrica i množenje matrica skalarom vrijede svojstva koja vrijede i za realne brojeve, dakle asocijativnost, komutativnost, te distributivnost množenja (skalarom) prema zbrajanju.

Razliku matrica $A - B$ treba shvatiti kao skraćeni zapis za $A + (-1) \cdot B$.

Preostaje još definirati množenje matrica. Produkt AB matrica A i B definira se samo ako matrica A ima toliko stupaca koliko matrica B ima redaka. Broj redaka matrice AB isti je kao i matrice A, a broj stupaca jednak je broju stupaca matrica B.

Definicija 1.2.5 *Neka je matrica A tipa $m \times n$ i B tipa $n \times p$.* ***Produkt matrica*** *A i B je matrica C tipa $m \times p$, čiji su elementi dani s*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, p\}.$$

Primjer 6

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \ldots = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Iz definicije i primjera se vidi da množenje matrica opećenito **nije komutativno**, na što treba posebno obratiti pažnju u zadacima. Dapače, čest je slučaj da postoji umnožak dviju matrica AB, ali uopće nije definiran umnožak BA, pa uspoređivanje matrica AB i BA nema smisla.

Međutim, množenje matrica jest asocijativno, tj. za svake tri matrice A, B i C takve da su svi produkti AB, $(AB)C$, BC i $A(BC)$ definirani, vrijedi

$$(AB)C = A(BC).$$

Važnu ulogu u množenju matrica imaju jedinična i nul-matrica. Pod uvjetom da je za proizvoljnu zadanu matricu A množenje jediničnom matricom I (nekog reda) i nul-matricom O (nekog reda) dobro definirano, vrijedi $A \cdot I = I \cdot A = A$ (tj. jedinična matrica djeluje kao neutralni element za operaciju množenja matrica) i $A \cdot O = O \cdot A = O$.

Formalno možemo uvesti potenciranje matrice prirodnim brojevima: produkt $A \cdot A$ skraćeno pišemo kao A^2, $A \cdot A \cdot A = A^3$ itd.

Množenje matrica je distributivno prema zbrajanju slijeva i zdesna (uz uvjet da su svi produkti dobro definirani):

$$C(A+B) = CA + CB,$$

$$(A+B)D = AD + BD.$$

Vrijede i slijedeća svojstva za množenje skalarom λ:

$$\lambda(AB) = (\lambda A)D = A(\lambda D).$$

1. Izračunajte $A + 2B$ za sljedeće matrice (ako postoji):

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

2. Za matrice A i B izračunajte AB i BA (ako postoje):

   (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 & -6 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -3 & 10 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

3. Neka je $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Izračunajte A^3 i $(A^\tau)^2$.

1.3 Inverzna matrica

Pojam inverzne matrice uvodimo samo za kvadratne matrice.

Definicija 1.3.1 *Za kvdratnu matricu A n-tog reda kažemo da je* ***regularna (invertibilna)*** *ako postoji matrica B reda n tako da vrijedi*

$$AB = BA = I,$$

gdje je I jedinična matrica reda n. Kažemo da je matrica ***singularna*** *ako ona nije regularna.*

Može se pokazati da je matrica B iz definicije inverzne matrice **jedinstvena**. Stoga za nju uvodimo posebnu oznaku: ako matrica A ima inverz, označavat ćemo ga s A^{-1}. Po definiciji dakle vrijedi:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Za svake dvije invertibilne matrice A i B reda n, te jediničnu matricu I istog reda vrijede sljedeća svojstva:

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

(3) $I^{-1} = I$,

što nećemo dokazivati. Iz ovih svojstava vidimo kako se potenciranje matrice prirodnim brojem može proširiti do potenciranja proizvoljnim cijelim brojem. Naime, svojstvo (2) povlači $A^{-2} = (A^2)^{-1} = (A \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1}$. Dalje, indukcijom se može dokazati da općenito vrijedi $A^{-n} = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}$ (n puta).

Pitanje postojanja inverzne matrice često se javlja prilikom rješavanja sustava linearnih jednažbi. Sustav od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica $x_1, \ldots, x_n$ možemo zapisati u matričnoj formi ovako:

$$A \cdot X = B,$$

gdje je A matrica sustava, a X i B definirani su ovako:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Ako je matrica A regularna, onda množenjem jednadžbe $A \cdot X = B$ slijeva s matricom A^{-1} dobivamo jednadžbu

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

što daje jedinstveno rješenje sustava. Dakle, ako znamo inverznu matricu A^{-1}, rješenje sustava od n jednadžbi s n nepoznanica možemo odmah napisati kao $X = A^{-1} \cdot B$, što ima smisla samo ako je matrica sustava invertibilna. Sustave u kojima to jest slučaj rješavamo po tzv. **Cramerovom pravilu**, i takvi sustavi imaju jedinstveno rješenje.

Postavlja se pitanje: kako odrediti inverznu matricu zadane kvadratne matrice? Odgovor daju dvije metode - metoda elementarnih transformacija matrica, te metodu adjunkte (koju ćemo upoznati nakon što uvedemo pojam determinante).

1.4 Elementarne matrične transformacije

Definicija 1.4.1 *Pod* ***elementarnim transformacijama*** *matrice podrazumijevamo sljedeće operacije:*

(1) zamjena dvaju stupaca

(2) zamjena dvaju redaka

(3) množenje jednog stupca realnim brojem različitim od nule

(4) množenje jednog retka realnim brojem različitim od nule

(5) dodavanje jednog stupca pomnoženog realnim brojem drugom stupcu

(6) dodavanje jednog retka pomnoženog realnim brojem drugom retku

Za potrebe pronalaženja inverza kvadratne matrice A reda n metodom elementarnih transformacija promatrat ćemo matricu $(A|I)$, gdje je I jedinična matrica također reda n.

Suština metode elementarnih transformacija sadržana je u sljedećoj tvrdnji: Ako se za kvadratnu matricu A matrica $(A|I)$ elementarnim transformacijama može svesti na oblik $(I|B)$, onda je A regularna i vrijedi $A^{-1} = B$. Ako to nije moguće, A je singularna matrica.

Primjer 7 Za matricu $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ izračunajte A^{-1}.

Rješenje:

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 1 & 0 \\ 1 & 2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim^1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 & 1 \\ 2 & 3 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim^2$$
$$\sim^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 & 1 \\ 0 & -1 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 & -3 \\ 0 & -1 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim^4$$
$$\sim^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 & -3 \\ 0 & 1 & | & -1 & 2 \end{pmatrix} = (I|A^{-1}),$$

gdje su redom primjenjene sljedeće transformacije:

(1) zamjena prvog i drugog retka

(2) prvi redak pomnožen s -2 i dodan drugom retku

(3) drugi redak pomnožen s 2 i dodan prvom retku

(4) prvi redak pomnožen s -1.

Odavdje jednostavno pročitamo desni dio matrice $(I|A^{-1})$ - to je inverzna matrica:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Koristeći transformacije matrica odredite inverz sljedećih matrica:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

   (c) $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1.5 Determinanta

Definicija 1.5.1 ***Determinanta*** *je realna funkcija koja kvadratnoj matrici pridružuje realan broj (kojeg zovemo* **determinanta matrice***), a osnovna svojstva kojeg zadovoljava jesu:*

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(BA) \\ \det I &= 1. \end{aligned}$$

Determinantu matrice $A = (a_{ij})$ označavamo s $|a_{ij}|$, npr. za matricu $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ pišemo umjesto $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ skraćeno $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Funkciju $A \to \det A$ definiramo induktivno:

(1) Za kvadratnu matricu **prvog** reda (degenerirani slučaj, jer se matrica sastoji od samo jednog elementa) definiramo: $\det(a) := |a|$

(2) Za kvadratnu matricu **drugog** reda:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} := a_1 b_2 - a_2 b_1$$

(3) Za kvadratnu matricu **trećeg** reda:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} := a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$\vdots$

(n) Za kvadratnu matricu **n-tog** reda $A = (a_{ij})$ definiramo

$$\det A := a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{n-1} a_{1n} \det A_{1n},$$

gdje je A_{1k} $(k \in \{1, \ldots, n\})$ kvadratna matrica (n-1)-og reda koja se od matrice A dobije ispuštanjem prvog retka i k-tog stupca.

Napomena: U definiciji determinante za opću matricu n-tog reda mogli smo fiksirati bilo koji redak ili stupac, nije bilo potrebno uzeti baš prvi redak. Kažemo da smo determinantu matrice A **razvili po prvom retku**.

Primjer 8 Razvojem po drugom retku izračunajte

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rješenje: Svakom elementu gornje matrice pridružen je multiplikativni faktor 1 ili -1, ovisno o tome na kojem se mjestu u matrici element nalazi. Npr. broj 4 se nalazi na presjeku drugog retka i drugog stupca, pa je njemu pridružen faktor $(-1)^{2+2}$, dakle broj 1 (općenito, elementu a_{ij} pridružen je broj $(-1)^{i+j}$). Razvoj po drugom retku sada izgleda ovako:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+3} \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (9+2) + 4 \cdot (6-1) + 5(-4-3) = -4.$$

Napomena: Uvjerite se na gornjem primjeru da vrijednost determinante zadane kvadratne matrice **ne ovisi** o tome po kojem se stupcu ili retku determinanta razvija. Ova činjenica znatno olakšava računanje determinante, jer nam omogućuje da izaberemo stupac ili redak po kojem razvijamo determinantu. U pravilu biramo onaj redak ili stupac koji sadrži najviše nula.

Također, prilikom računanja determinante mogu se koristiti sljedeća svojstva (koja ne dokazujemo):

(1) Ako svi elementi nekog stupca ili nekog retka matrice A iščezavaju, onda je $\det A = 0$.

(2) Ako dva stupca ili dva retka determinante zamijene mjesta, ona mijenja predznak.

(3) Ako matrica ima dva stupca ili dva retka jednaka, onda je $\det A = 0$.

(4) Ako stupac ili redak matrice A pomnožimo sa nekim realnim brojem k, onda je determinanta nove matrice B jednaka k puta determinanta stare matrice, tj. $\det B = k \det A$.

(5) Ako je A singularna matrica, onda je $\det A = 0$.

(6) Za svake dvije kvadratne matrice A i B vrijedi

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

(7) Ako je $A = (a_{ij})$ trokutasta matrica, onda je $\det A = 0$.

(8) Matrica i njoj transponirana matrica imaju jednake determinante, tj. vrijedi

$$\det A = \det A^{\tau}.$$

1. Izračunajte determinantu matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

   Napomena: Svojstvo (4) kaže da singularna matrica ima determinantu nula, što znači da su sve matrice koje imaju determinantu različitu od nule nužno regularne (invertibilne matrice). Međutim, može se pokazati i obrat: svaka regularna matrica ima ne-nul determinantu. Dakle, regularne matrice su one i samo one kvadratne matrice koje imaju determinantu različitu od nule. Ovo nam daje dobar način provjere postojanja inverza zadane kvadratne matrice.

2. Izračunajte determinante matrica iz Zadatka 8 i provjerite da se zaista radi o invertibilnim matricama.

3. Izračunajte determinante sljedećih matrica:

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha + \imath\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - \imath\sin\alpha \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & \log_y x \\ \log_x y & 1 \end{pmatrix}$.

4. Izračunajte determinantu matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$:

   (a) razvijanjem po drugom retku

   (b) razvijanjem po trećem stupcu

   (c) koristeći svojstva determinante.

5. Izračunajte determinantu matrice
$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & x_2 & 0 & 0 \\ y_2 & y_3 & x_3 & 0 \\ y_4 & y_5 & y_6 & x_4 \end{pmatrix}.$$

6. Riješite jednadžbu:
$$\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = 0.$$

1.6 Primjene determinante

Metoda adjunkte

Sada ćemo vidjeti kako se pojam determinante može iskoristiti za izračunavanje inverza kvadratne matrice.

Definicija 1.6.1 ***Adjunkta*** *A^* kvadratne matrice A je matrica koja na (i,j)-om mjestu ima broj $(-1)^{j+i} \cdot \det A_{ji}$ (zovemo ga* ***kofaktor*** *ili* ***algebarski komplement*** *elementa a_{ij}), gdje je A_{ji} matrica dobivena iz matrice A izbacivanjem j-og retka i i-og stupca.*

Primjer 9 Za matricu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ izračunajte adjunktu.

Rješenje: Računamo $A^* = (a^*_{ij})$ po elementima:

$$a^*_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 3 - (-1)\cdot 5 = 2$$

$$a^*_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(1\cdot 3 - 2\cdot 5) = 7$$

$$\vdots$$

$$a^*_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 1\cdot 3 = -4,$$

što daje $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -11 & -1 & 7 \\ 17 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Preko adjunkte možemo izračunati i inverznu matricu zadane kvadratne matrice A. Naime, vrijedi
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

Primjer 10 Izračunajte inverz matrice iz prethodnog primjera.

Rješenje: Već smo izračunali ajdunktu A^* matrice A, pa preostaje izračunati samo determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25,$$

pa je

$$A^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -11 & -1 & 7 \\ 17 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Koristeći identitet $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ provjerite da je matrica A^{-1} doista inverzna matrica matrice A.

2. Metodom adjunkte odredite inverze matrica iz Zadatka 8.

Cramerovo pravilo

Determinanta se koristi i pri rješavanju sustava od n jednadžbi s n nepoznanica kod kojeg je matrica sustava invertibilna. Kao što smo već napomenuli, simbolički te sustave zapisujemo u obliku $A \cdot X = B$, gdje je A matrica sustava, X stupčana matrica s nepoznanicama sustava $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a B stupčana matrica sa slobodnim koeficijentima $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Označimo stupce matrice A sada redom slovima $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ..., $\mathbf{a_n}$, a stupac matrice B s $\mathbf{b}$.

Cramerovo pravilo kaže: Ako je matrica A sustava $A \cdot X = B$ invertibilna, onda je rješenje sustava jedinstveno i dano sa

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \;\; x_2 = \frac{D_2}{D}, \;\; \ldots \;\; x_n = \frac{D_n}{D},$$

gdje je $D = \det[\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}] = \det A$, $D_1 = \det[\mathbf{b}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}]$, ..., $D_n = \det[\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{b}]$, tj. determinante $D_1, D_2, \ldots, D_n$ su determinante matrica koje su dobivene tako da se u matricu A ubacuje stupac $\mathbf{b}$ umjesto stupca $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$, redom.

Primjer 11 Pomoću Cramerovog pravila riješite sustav iz Primjera 1.

Rješenje: Sustav najprije zapisujemo matrično:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Treba izračunati determinantu $D = \det A$ (A je matrica sustava) - dobije se $D = -34$ (ostavljamo za vježbu). Dalje, računamo determinantu matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

koja se dobije tako da se prvi stupac matrice A zamijeni stupcem matrice B (B je matrica slobodnih koeficijenata). Dobije se $D_1 = -68$. Analogno postupamo za ostala tri stupca matrice A - determinante matrica koje tako dobivamo redom iznose $D_2 = 34, D_3 = -34, D_4 = 0$, što prema Cramerovom pravilu daje konačno rješenje sustava: $x_1 = \frac{-68}{-34} = 2, x_2 = \frac{34}{-34} = -1, x_3 = \frac{-34}{-34} = 1, x_4 = \frac{0}{-34} = 0$.

Napomena: Prema Cramerovom pravilu moguće je rješavati samo one sustave linearnih jednadžbi koji imaju jednak broj jednaždbi i nepoznanica, i to samo takve sustave među njima kod kojih je matrica sustava invertibilna. To npr. znači da se Primjer 2 ne može riješiti primjenom Cramerovog pravila, jer matrica sustava nije invertibilna (provjerite!).

1. Koristeći gornju napomenu provjerite koji se od Zadataka 1 - 6 mogu riješiti primjenom Cramerovog pravila i riješite te zadatke.

1.7 Sustavi linearnih jednadžbi

Nakon što smo naučili rješavati najjednostavnije sustave linearnih jednažbi (sustavi s jednakim brojem jednadžbi i nepoznanica kod kojih je matrica sustava invertibilna), ostaje pitanje kako rješiti sustave kod kojih matrica sustava nije invertibilna, ili takve sustave kod kojih nemamo isti broj jednadžbi i nepoznanica.

Odgovor daje već opisana metoda elementarnih matričnih transformacija (koju smo već koristili za pronalaženje inverza matrice). Ideja je u biti ista kao kod Gaussove metode eliminacije. No, umjesto da se radi s jednadžbama, manipulira se s proširenom matricom sustava, koju se pokušava svesti na dijagonalni oblik s jedinicama na glavnoj dijagonali.

Napomena: Mogu se koristiti sve matrične transformacije koje smo već uveli, ali **samo sa recima**. Ipak, dozovljena je i zamjena stupaca, uz nužan oprez: kako svako stupac u biti predstavlja jednu varijablu sustava, zamjena stupaca znači da se događa i zamjena varijabli koje su predstavljene tim stupcima.

Primjer 12 Pokažimo na sustavu iz Zadatka 2 kako se primjenom niza elementarnih matričnih transformacija proširena matrica sustava svodi na elementarni oblik:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim^1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim^2$$

$$\sim^2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim^3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim^4$$

$$\sim^4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim^5 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^6$$

$$\sim^6 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^7 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^8$$

$$\sim^8 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

gdje su redom korištene sljedeće transformacije:

(1) zamjena prvog i četvrtog retka (kako bismo u gornjem lijevom kutu imali jedinicu, što je standardni početak rješavanja sustava putem elementarnih transformacija - želimo na kraju imati dijagonalnu formu s jedinicama na dijagonali!)

(2) prvi redak pomnožen redom s -1, -4 i -5 i dodan redom drugom, trećem i četvrtom retku (želja nam je dobiti nule na svim nedijagonalnim elementima)

(3) zamjena drugog i trećeg stupca (kako bismo kao drugi dijagonalni element - na presjeku drugog retka i drugog stupca - također imali jedinicu) - bitno je ovdje primjetiti da su time varijble y i z zamijenile mjesta. Naime, varijabli y sada pripada treći, a varijabli z drugi stupac.

(4) drugi redak pomnožen redom s -1, 2 i 1 i dodan redom prvom, trećem i četvrtom retku (vidi napomenu uz (2))

(5) treći redak pomnožen s -1 i dodan četvrtom retku (kako bismo dobili nulu na jedinom preostalom nedijalgonalnom elementu četvrtog retka i jedinicu na dijagonalnom elementu)

(6) četvrti redak pomnožen redom s -1 i 4 i dodan redom prvom i trećem retku (vidi napomenu uz (2))

(7) treći redak podijeljen s -7 (kako bi na dijagonalnom elementu trećeg retka dobili jedinicu)

(8) treći redak pomnožen redom s -3 i 2 i dodan redom prvom i drugom retku (vidi napomenu uz (2))

Ovim postupkom dolazimo do proširene matrice sustava koji je ekvivalentan početnom, pa ima isto rješenje. Međutim, rješenje ovog sustava možemo jednostavno pročitati iz proširene matrice koju smo dobili (uz napomenu da su y i z zamijenili mjesta): $x = 1$, $z = -1$, $y = -1$, $t = 1$, pa uređena četvorka $(1, -1, -1, 1)$ čini jedinstveno rješenje početnog sustava.

Napomena: U Primjeru 2 rješavali smo sustav koji ima beskonačno mnogo rješenja, što se očitovalo u činjenici da smo rješavajući zadatak došli do dvije ekvivalentne jednadžbe, nakon čega smo jednu jednadžbu odbacili. Slično se postupa i kod metode elementarnih matričnih transformacija: ako se prilikom rješavanja pojave dva istovjetna **retka** (jer retci predstavljaju jednadžbe), možemo jedan od njih odbaciti - ostat će nam proširena matrica koja ima jedan redak manje. Na primjer, kod matrice

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 1 & | & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & | & 5 \\ -2 & -4 & -8 & -2 & | & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -3 & | & 4 \end{array}\right)$$

se prvi i treći redak podudaraju (što se vidi ako se treći redak podijeli s -2), pa jedan od njih možemo odbaciti, nastavljajući raditi s matricom

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 1 & | & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & | & 5 \\ 1 & -3 & 0 & -3 & | & 4 \end{array}\right).$$

Naravno, ovu matricu više ne možemo svesti na dijagonalni oblik (jer ona nije kvadratna), ali možemo na kvazidijagonalni, koji se dobije kada se povuče dijagnala od elementa na presjeku prvog retka i prvog stupca do posljednjeg mogućeg elementa. Ovakvi sustavi obično imaju beskonačno mnogo rješenja.

Napomena: Slično tome, može se dogoditi da imamo dva retka koji imaju sve elemente redom iste, a razlikuju se samo u slobodnom članu, npr. kao u matrici

$$\left(\begin{array}{cccccc} 15 & 2 & 0 & 7 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & | & -1 \\ 2 & 4 & 7 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & | & 3 \end{array}\right),$$

gdje su drugi i četvrti redak gotovo identični, ali se razlikuju u slobodnom elementu. Ako oduzmemo drugi redak od četvrtog, dolazimo do ekvivalentne matrice

$$\left(\begin{array}{cccccc} 15 & 2 & 0 & 7 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & | & -1 \\ 2 & 4 & 7 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{array}\right),$$

čiji četvrti redak daje jednadžbu $0 \cdot x_4 = 4$, koja očito nema rješenja. Dakle, ako se pojavi slučaj redaka koji imaju sve elemente osim slobodnih članova redom iste, onda sustav kojeg rješavamo nema rješenja i zovemo ga **nemoguć sustav**.

Zadaci s rokova

1. Riješite zadatke 1 - 6 (Poglavlje 1.1) upotrebom metode elementarnih transformacija.

Sustavi ovisni o paramteru

Rješavamo sustave koji ovise o promjenjivoj realnoj veličini, parametru λ.

Primjer 13 Diskutirajte sustav u ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= \lambda^2 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Rješenje: Krećemo od proširene matrice sustava:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -(\lambda-1) & \lambda-1 & \lambda\cdot(\lambda-1) \\ 0 & -(\lambda-1)(\lambda+1) & -(\lambda-1) & -(\lambda-1)\cdot(\lambda+1) \end{array}\right),$$

gdje je $\sim^1$ transformacija u kojoj je prvi redak pomnožen redom s -1 i $-\lambda$ i dodan redom drugom i trećem retku.

Odavdje je očito da se pojavljuju dva slučaja:

(a) $\lambda = 1$: imamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -(\lambda-1) & \lambda-1 & \lambda\cdot(\lambda-1) \\ 0 & -(\lambda-1)(\lambda+1) & -(\lambda-1) & -(\lambda-1)\cdot(\lambda+1) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Druga i treća jednadžba su ekvivalentne i uvijek istinite, pa preostaje samo jednadžba koja proizlazi iz prvog retka: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, odakle imamo $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = 1 - x_1 - x_2 = 1 - \alpha - \beta$, pa rješenja ima beskonačno mnogo i dana su s $(\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta)$, gdje su α i β realni brojevi.

(b) $\lambda \neq 1$: možemo podijeliti drugi i treći redak s $\lambda - 1$ (to je transformacija (2)), pa imamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -(\lambda-1) & \lambda-1 & \lambda\cdot(\lambda-1) \\ 0 & -(\lambda-1)(\lambda+1) & -(\lambda-1) & -(\lambda-1)\cdot(\lambda+1) \end{array}\right) \sim^2$$

$$\sim^2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -1 & 1 & \lambda \\ 0 & -(\lambda+1) & -1 & -(\lambda+1) \end{array}\right) \sim^3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim^4$$

$$\sim^4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim^5 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda+1 & \lambda^2+\lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 1 & 0 & -1 & -\lambda-1 \end{array}\right) \sim^6$$

$$\sim^6 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda+1 & \lambda^2+\lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda-2 & -\lambda^2-2\lambda-1 \end{array}\right) \sim^7$$

$$\sim^7 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda+1 & \lambda^2+\lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda+2 & (\lambda+1)^2 \end{array}\right),$$

uz izvršene sljedeće elementarne transformacije:

(3) prvi redak dodan trećem

(4) drugi redak pomnožen s -1

(5) drugi redak pomnožen redom s $-\lambda$ i 1 i dodan redom prvom i trećem

(6) prvi redak pomnožen s -1 i dodan trećem retku

(7) treći redak pomnožen s -1.

Novodobivena proširena matrica pokazuje i da se ovaj podslučaj dijeli na dva podslučaja:

(b/a) $\lambda = -2$: imamo nemoguć sustav, jer je proširena matrica sustava dana je s
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda+1 & \lambda^2+\lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda+2 & (\lambda+1)^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$
što je sustav koji očito nema rješenje (treća jednadžba glasi $0 = 1$).

(b/b) $\lambda \neq -2$: možemo podijeliti treći redak s $\lambda + 2$ (to je transformacija (8)), pa dobivamo:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda+1 & \lambda^2+\lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda+2 & (\lambda+1)^2 \end{array}\right) \sim^8$$
$$\sim^8 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda+1 & \lambda^2+\lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{array}\right) \sim^9$$
$$\sim^9 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-(\lambda+1)\cdot\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda+\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{array}\right) =$$
$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{array}\right),$$
gdje transformacija (9) predstavlja množenje trećeg retka redom s $-\lambda - 1$ i 1 dodavanje redom prvom i drugom retku.

Odavdje zaključujemo da postoji jedinstveno rješenje sustava, dano uređenom trojkom
$(-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, -\frac{1}{\lambda+2}, \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2})$.

Konačno rješenje možemo skraćeno zapisati ovako:

(1) Ako je $\lambda = 1$, sustav ima beskonačno mnogo rješenja predstavljenih uređenom trojkom $(\alpha, \beta, 1 - \alpha - \beta)$, gdje su α i β realni brojevi.

(2) Ako je $\lambda = -2$, sustav je nemoguć.

(3) Ako je $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$, sustav ima jedinstveno rješenje: $(-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, -\frac{1}{\lambda+2}, \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2})$.

Zadaci sa rokova:

1. Diskutirajte sustav u ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:
$3x_1 + \lambda x_2 - 5 = 0$
$x_1 + x_2 = 2$
$\lambda x_1 + 2x_2 = 4$.

2. Diskutirajte sustav u ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:
$x_1 + 2x_2 + (3-\lambda)x_3 = 1$
$x_1 + x_2 - 2x_3 = -2$
$\lambda x_1 + (2\lambda+1)x_2 + 5x_3 = 3.$

3. Diskutirajte sustav u ovisnosti o $a, b, c \in \mathbb{R}$:
$x_1 + ax_2 + x_3 = 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 = b,$
$x_1 + x_2 + x_3 = c.$

4. Diskutirajte sustav u ovisnosti o $a, b, c \in \mathbb{R}$:
$x_1 + x_2 + x_3 = a,$
$x_1 + x_2 + x_3 = b,$
$x_1 + x_2 + cx_3 = 1.$

1.8 Matrične jednadžbe

U ovom poglavlju rješavamo jednadžbe u kojima su nepoznanice matrice. Česti su zadaci u kojima je nepoznanica kvadratna matrica drugog reda, a zahtijeva se manipulacija zadanim matricama drugog reda, npr. pronalaženje adjunkte zadane matrice, računanje determinante ili inverza.

Počnimo od adjunkte kvadratne matrice reda 2: matrice koje se dobiju izbacivanjem pojedinih redaka ili stupaca zapravo su realni brojevi, pa nema problema oko računanja kofaktora (algebarskih komplemenata). Za općenito zadanu kvadratnu matricu drugog reda $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ može se lako vidjeti da je A^* uvijek dana s

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

što daje jednostavnu formulu za inverz. Naime, ako je matrica A regularna, onda $\det A = ad - bc \neq 0$, pa korištenjem formule $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$ zaključujemo da je inverz matrice A dan s

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Primjer 14 Riješite matričnu jednadžbu $AX = (A + X)AA^*$ ako je $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Rješenje: Riješit ćemo zadatak na dva načina:

1. način

Da bismo našli X (koji je očito kvadratna matrica reda 2), potrebno je prvo izračunati A^*, koju "očitamo" prema gornjoj formuli: $A^* = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, pa uz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ računamo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2x-3z & 2y-3w \\ x-4z & y-4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 & y-3 \\ z+1 & w-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2x-3z & 2y-3w \\ x-4z & y-4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x-10 & -5y+15 \\ -5z-5 & -5w+20 \end{pmatrix},$$

što vodi na sustav (nakon izjednačavanja odgovarajućih elemenata matrice)

$$\begin{aligned} 7x-3z &= -10 \\ 7y-3w &= 15 \\ x+z &= -5 \\ y+w &= 20, \end{aligned}$$

odnosno na dva sustava

$$\begin{aligned} 7x-3z &= -10 \\ x+z &= -5, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} 7y-3w &= 15 \\ y+w &= 20, \end{aligned}$$

koji daju rješenje $X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{15}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{25}{2} \end{pmatrix}$.

2. način

Osnovna ideja drugog načina je da se izvrši maksimalna moguća manipulacija izrazima koji se pojavljuju u jednadžbi prije nego što se krene s konkretnim računom.

U zadanoj jednadžbi pojavljuje se faktor AA^*, a prema formuli za inverz imamo $A^* = \det A \cdot A^{-1}$, pa jednadžba postaje:

$AX = (A+X) \cdot A \cdot \det A \cdot A^{-1}$
$AX = \det A \cdot (A+X)AA^{-1}$
$AX = \det A \cdot (A+X) \cdot I$
$AX = \det A \cdot (A+X)$
$AX = \det A \cdot A + \det A \cdot X$
$AX - \det A \cdot X = \det A \cdot A$
$(A - \det A \cdot I) \cdot X = \det A \cdot A$
$X = \det A \cdot (A - \det A \cdot I)^{-1} \cdot A,$

gdje je I jedinična matrica drugog reda. Uočite da je poštovana činjenica da množenje matrica nije komutativno, pa je u sedmom retku množenje matricom $(A - \det A \cdot I)^{-1}$ izvršeno slijeva, jer je faktor $A - \det A \cdot I$ s lijeve strane nepoznanice X. Množenjem matrice s njenim inverzom postižemo isti efekt kao množenjem realnog broja s njegovim inevrzom - dobivamo jedinični element, tj. jediničnu matricu, koja kao neutralni element za množenje matrica s lijeve strane jednakosti ostavlja samo X.

Dobili smo eksplicitni izraz za X i sada je potrebno samo izračunati determinantu matrice A i izvršiti operacije iz desne strane posljednje jednakosti. Dobiva se

$$\det A = 2 \cdot (-3) - (-3) \cdot 1 = -5$$

$$X = -5 \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = -5 \cdot \left(\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},$$

odakle se dobiva isto rješenje kao i pri rješavanju prvim načinom.

Zadaci sa rokova:

1. Odredite $\det X$ ako je $ABX^{-1} = (A^*B^*)^*$ pri čemu je $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = A + A^*$.

2. Riješite matričnu jednadžbu $A = BX^{-1}$ pri čemu je $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -17 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$.

3. Riješite matričnu jednadžbu $\det AA^*X^* + X^* = A^{-1}B$ pri čemu su: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Riješite matričnu jednadžbu $AX = B$, pri čemu je $a_{12} = a_{21} = a_{34} = a_{43} = -1$, $b_{14} = b_{23} = b_{32} = b_{41} = 1$, dok su preostali elementi matrica jednaki 0 (matrice su reda 4).

5. Riješite matričnu jednadžbu $AXA^{-1} = B$ pri čemu je $a_{13} = a_{22} = a_{31} = a_{44} = -1$, $a_{ij} = 0$ u preostalim slučajevima, te $b_{12} = b_{21} = b_{34} = b_{43} = 1$ i $b_{ij} = 0$ u preostalim slučajevima (matrice su reda 4).

6. Riješite matričnu jednadžbu $(A - 2I)X = A + I$, pri čemu je I jedinična matrica, a A matrica zadana sa $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 2$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 3$, $a_{23} = 4$, $a_{31} = 1$, $a_{32} = 0$, $a_{33} = 1$.

7. Riješite matričnu jednadžbu $AX - 2I = B$, pri čemu su: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Riješite matričnu jednadžbu $BXB^{-1} = A$ pri čemu je $b_{12} = b_{21} = b_{34} = b_{43} = -1$ $b_{ij} = 0$ u preostalim slučajevima, $a_{12} = a_{21} = a_{34} = a_{43} = 2$ $a_{ij} = 0$ u preostalim slučajevima (matrice su tipa 4×4).

9. Odredite jednostupčanu matricu X koja zadovoljava jednadžbu $AX = B$ pri čemu su:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 22 \\ 3 \end{pmatrix}.$$